VI OLIMPIADA MATEMÁTICA EN ESPAÑOL – 2012
Secciones Bilingües de Eslovaquia – Fase Final – Trstená

GANADORAS
Primer premio: **Alexandra Dupláková**, 3º curso de la Sección de Košice.
Segundo premio: **Mária Viglašová**, 2º curso de la Sección de Trstená.
Tercer premio: **Karin Holienčíková**, 3º curso de la Sección de Banská Bystrica.

EJERCICIOS DE MUESTRA

PROBLEMA 1:
A una señora se le cayó al suelo una cesta en la que llevaba muchos huevos. Alguien le preguntó cuantos huevos llevaba. Ella no se acordaba del número, pero sí recordaba que al contarlos en grupos de 2, 3, 4 y 5, sobraban 1, 2, 3 y 4 respectivamente. ¿Cuántos huevos llevaba?

Solución al problema 1

La condición de que al dividir entre 5 sobren 4 huevos hace que sólo sea posible que la cifra de huevos termine en 4 o en 9, pero como al dividir entre 2 sobra 1, tienen que ser impares, así que la cifra tiene que terminar en 9. Así que los resultados posibles con estas 2 condiciones son
9, 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99, 109, 119, 129, 139, …...
Los números 9, 39, 69, 99, 129, …. de la forma (30k+9) son divisibles entre 3, así que los descartamos. Quedan:
19, 29, 49, 59, 79, 89, 109, 119, 139, …...
Al dividir 19, 49, 79, 109, 139, ….. de la forma (19+30k) entre 3 da resto 1, y no 2 como se pide, así que descartados también, Quedan.
29, 59, 89, 119, ….
Vamos con la división entre 4. Al dividir 29 y 89 entre 4 da resto 1, así que descartados también (y todos los números de la forma (29+60k) dan resto 1 al dividirlos entre 4).
Así que los números que cumplen todas las condiciones son 59, 119, …. en general de la forma (59+60k).

PROBLEMA 2:

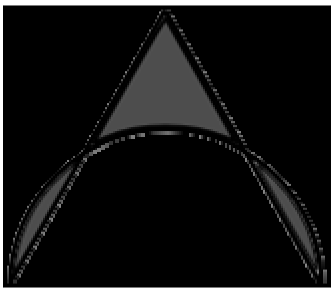
El encargado de un faro ha recibido la comunicación de que va a haber un corte del suministro eléctrico y debe hacer funcionar el faro con ayuda del generador alimentado con gasóleo. Ese generador consume 6 litros de gasóleo cada hora y medio litro más cada vez que hay que ponerlo en marcha (inicialmente está parado). En las 10 horas exactas que durará la noche, el faro no puede dejar de funcionar durante más de 10 minutos seguidos. Y cuando funciona tiene que hacerlo durante al menos 15 minutos seguidos. ¿Cuántos litros de gasóleo necesita, como mínimo, para cumplir con las normas de funcionamiento del faro?

Solución al problema 2

La mejor manera de ahorrar combustible es hacer paradas de 10 minutos (más largas no están permitidas). Con cada parada ahorramos 1 litro de gasóleo, pero gastamos medio litro en volver a poner en marcha el generador. Es obvio que, en principio, la mejor estrategia de ahorro consiste en intercalar periodos de 15 minutos de funcionamiento (más breves no están permitidos) con periodos de 10 minutos de parada. En cada proceso "arranque-15 minutos funcionando-10 minutos de parada" se consumen ·6 2
4
1
2
1 + = litros de gasóleo. Para completar las 10 horas de noche necesitamos 24
25
600 = de esos procesos, luego parece que la cantidad mínima de combustible necesaria es 48 litros. Sin embargo, hay una manera de ahorrar medio litro más. Cuando comienzan las 10 horas de noche, se puede estar 10 minutos sin encender el faro. Si después encadenamos 23 procesos "arranque-15 minutos funcionando-10 minutos de parada", completamos 10 horas menos 15 minutos. Tendríamos que volver a arrancar el generador y hacerlo funcionar otros 15 minutos, consumiendo de nuevo 48 litros. Ahora bien, si, por ejemplo, uno de los periodos de funcionamiento lo hacemos de 30 minutos y "guardamos" los 10 minutos de parada intermedia para los últimos 10 minutos de noche, el tiempo de funcionamiento es el mismo pero nos ahorramos un arranque, es decir, medio litro de gasóleo. Basta con 47,5 litros.

PROBLEMA 3

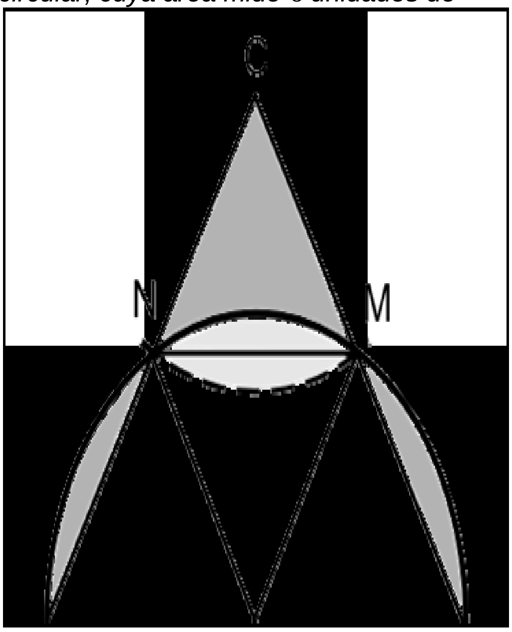
La zona oscura está comprendida entre el triángulo equilátero y la semicircunferencia de radio
1. Hallar su area.



Solución al problema 3

El triángulo AON es isósceles y el ángulo en el vértice A mide 60º, por tanto el ángulo en el vértice N también mide

60º, con lo que podemos afirmar que es equilátero. El mismo razonamiento vale para el triángulo BOM. Puesto que OM corta a dos rectas paralelas, la AB y la NM, el ánfulo $\hat{OMN} = 60^{o}$ *. De la misma manera se justifica que* $\hat{ONM} = 60^{o}$ *. Por tanto los tres triángulos AON , BOM y NOM son equiláteros y sus lados miden 1 unidad. El área señalada en gris, limitada por el arco de circunferencia y el triángulo MCN junto con el área, también gris, limitada por la cuerda BM y la circunferencia es igual al área del triángulo NCM. Al sumarle el área señalada en gris, limitada por la cuerda AN y la circunferencia, obtenemos un sector circular, cuya área mide* 6 *unidades de superficie.*



PROBLEMA 4

En un polígono regular de n vértices numerados de 1 a n, hay tres personas: A, B y C paradas en el vértice 1. En un momento dado, ellas comienzan a caminar por los lados.
A camina en el sentido de la numeración de los vértices (1 -> 2 -> 3 -> ...) y B y C lo hacen en sentido contrario. A se cruza con B por primera vez en un vértice y con C dos vértices mas adelante. Se sabe que A camina el doble de rápido que B y B el doble de rápido que C.
¿Cuántos vértices tiene el polígono y en que vértices ocurren los encuentros?

El polígono tiene 15 lados, A y B se encuentran en el vértice 11, A y C se encuentran en el vértice 13.

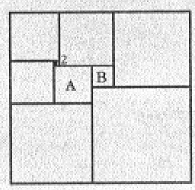
A → 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
B → 1 15 14 13 12 11 10 ...
C → 1 15 14 13 ...

PROBLEMA 5

Se tiene el siguiente rectángulo formado por la unión de nueve cuadrados tal y como se ve en la figura. Si el cuadrado más pequeño (en negro), mide 2 m de lado, ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo grande?

UN RECTÁNGULO FORMADO POR CUADRADOS

Se tiene un rectángulo formado por la unión de 9 cuadrados no superpuestos, como ves en la figura:

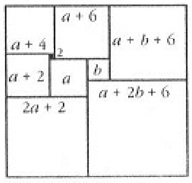


Si el cuadrado más pequeño tiene 2 metros de lado, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo grande?

Para resolver este problema es fundamental elegir una buena variable (una adecuada notación).

Es claro que, partiendo de los cuadrados A y B, podemos obtener muchas cosas. (Si lo hiciéramos con otros, no podríamos decir lo mismo. Compruébalo).

Llamando a y b a los lados de los cuadrados A y B, obtenemos los datos que ves en la figura de la derecha.



Teniendo en cuenta que en un rectángulo los lados opuestos tienen la misma longitud:

$$\left.\begin{array}{l}(a+4)+(a+6)+(a+b+6)=(2a+2)+(a+2b+6)\\(a+4)+(a+2)+(2a+2)=(a+b+6)+(a+2b+6)\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}a=14\\b=8\end{array}\right.$$

Por tanto, las dimensiones del rectángulo dado son 66 metros de ancho y 64 metros de alto.