



## ENSEÑAR Y APRENDER MATEMÁTICAS

ENRIQUE ZUAZUA IRIONDO (\*)  
ROBERTO RODRÍGUEZ DEL RIO (\*\*)

**RESUMEN.** Las Matemáticas constituyen uno de los más importantes bienes culturales de nuestra civilización. Su presencia es palpable en prácticamente todos los ámbitos de la actividad humana: desde la científica hasta la vida cotidiana. Probablemente en esto estemos todos de acuerdo. Aceptada la importancia de las Matemáticas, es inevitable que los profesores y los estudiantes se esfuercen, unos por enseñarlas y los otros por aprenderlas. Ahora bien, nuestro sistema educativo y todos los que estamos involucrados en él, ¿damos una respuesta eficiente a esta ineludible necesidad? De entrada, no parece que haya unanimidad en cuestiones tales como: ¿qué enseñar?, ¿cómo enseñar?, ¿qué formación debe tener quien enseña?, etc. En este artículo se abordan estas importantes cuestiones recorriendo diversos ámbitos de la Matemática y su enseñanza, en un momento en el que se están produciendo algunos importantes cambios legislativos en nuestro sistema educativo.

**ABSTRACT.** Mathematics is one of the most important cultural goods of our civilization. Its presence is tangible in all the fields of human activity: from scientific activity to daily life. We are probably agreed on that. Once the importance of Mathematics is accepted it is unavoidable that teachers and students make an effort, the former to teach it, the latter to learn it. However, do our educational system and all the people involved in it give an effective response to this need? To begin with, there is no unanimity in questions such as What to teach? How to teach? What training should those who teach have?, etc. In this article, different aspects of Mathematics and its teaching are dealt with, at the time in which important legislative changes are taking place in our educational system.

*La Naturaleza nada hace en vano,  
y más es en vano cuanto a menos sirve;  
pues la Naturaleza se complace en la simplicidad,  
y no adopta la pompa de las causas superfluas.*  
Isaac Newton, Principia.

### INTRODUCCIÓN: ALGUNAS CLAVES PARA UN IMPORTANTE DEBATE

A pesar de que el deseo de muchos matemáticos y profesores de Matemáticas sea

otro, las Matemáticas no se encuentran entre las preocupaciones más importantes del ciudadano. Sin embargo, son pocos los que a lo largo de su vida no han tenido, en

(\*) Universidad Autónoma de Madrid.

(\*\*) Universidad Complutense de Madrid.

algún que otro momento, contacto con ellas. Y prácticamente todo el mundo está de acuerdo en que es necesario un conocimiento básico de las Matemáticas para desenvolverse con una cierta soltura en la vida cotidiana. Por otra parte, si hay alguna materia que en las escuelas levanta pasiones, y también grandes desafecciones, esta es precisamente la de Matemáticas.

Las Matemáticas son ya una Ciencia antigua. Existen desde mucho antes de que se le dieran nombre y sus orígenes se remontan al menos al momento en que el ser humano empieza a contar. Cabría también decir, como en su momento afirmó Galileo, que el Universo está escrito en lenguaje matemático<sup>1</sup> y de ese modo estableceríamos que las Matemáticas surgen con nuestro Universo, de manera simultánea. Sin remontarnos tan lejos en el tiempo, Albert Einstein se preguntaba a principios del siglo que acabamos de dejar: «¿Cómo es posible que la matemática, un producto del pensamiento humano independiente de la experiencia, se adapte tan admirablemente a los objetos de la realidad?».

El debate sobre el papel que las Matemáticas han de desempeñar en nuestro sistema educativo y, de manera más general, su papel en la sociedad, viene ya de muy atrás. Como era de esperar, el año 2000, declarado por la UNESCO Año Internacional de las Matemáticas, desempolvó esa cuestión pendiente que ha sido objeto desde entonces de diversas iniciativas en diferentes ámbitos. Sin ir más lejos, cabe citar:

- Los Reales Decretos del MEC<sup>2</sup> donde se aborda la reforma de las enseñanzas mínimas tanto de la ESO como del Bachillerato.
- En la Comisión de Educación, Cultura y Deporte del Senado se constituyó una ponencia<sup>3</sup> sobre la situación de las enseñanzas científicas en la Educación Secundaria.
- Las sociedades matemáticas abordaron este tema en procesos de debate de los que surgieron algunas declaraciones sobre la situación de las matemáticas en la enseñanza no universitaria. Véase por ejemplo la de la Real Sociedad de Matemática Española (RSME)<sup>4</sup>.

A la hora de abordar la cuestión de las Matemáticas y su enseñanza conviene tal vez tener en cuenta los siguientes aspectos que la señalan como disciplina singular:

- *Omnipresencia de las Matemáticas.* Antes hacíamos referencia a la afirmación de Galileo de que las Matemáticas constituyen el lenguaje del Universo. La historia de la humanidad y en particular el desarrollo de la Ciencia y de la Tecnología no han hecho más que subrayar lo acertado de su visión. Por otra parte, en nuestra sociedad es creciente el papel cada vez más ubicuo y polifacético que las Matemáticas desempeñan: telecomunicaciones, finanzas, informática, medicina,

---

(1) «La filosofía está escrita en ese grandísimo libro abierto ante los ojos; quiero decir, el Universo, pero no se puede entender si antes no se aprende a entender la lengua, a conocer los caracteres en los que está escrito. Está escrito en lengua matemática y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es imposible entender ni una palabra; sin ellos es como girar vanamente en un oscuro laberinto-Galileo Galilei, *El Ensayador*.

(2) R.D. 3473/2000, de 29 de diciembre, sobre enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria y R.D. 3474/2000, de 29 de diciembre, sobre enseñanzas mínimas del Bachillerato. *Ley Orgánica 10/2002*, de 23 de diciembre, de Calidad de la Educación.

(3) Los trabajos en la ponencia, así como las conclusiones provisionales de la misma se pueden consultar en la página web de la Real Sociedad Matemática Española (RSME), <http://www.rsme.es>.

(4) También en la web de la RSME se puede consultar un informe sobre la educación matemática elaborado por su Comisión de Educación.

biotecnología, sin mencionar las clásicas áreas de la Ingeniería. Por otra parte las Matemáticas forman parte de nuestro entramado educativo desde que el niño entra en la escuela hasta que concluye el ciclo de la ESO. Por tanto, todos desarrollamos una relación con las Matemáticas que dura al menos diez años, y que frecuentemente volvemos a vivir a través de nuestros hijos cuando ya las creíamos dejadas atrás definitivamente.

- *¿Es necesario un contacto tan prolongado con las Matemáticas?* Cabría pensar que todas esas Matemáticas que el sistema educativo nos presenta desde los primeros cursos, pudieran ser fruto de la perversión de los matemáticos y de su capacidad histórica para influir en quienes pueden determinar las pautas de los sistemas educativos. Pero no es así, las Matemáticas, junto con la Lengua, forman los dos pilares centrales sobre los que se asienta todo el proceso educativo del niño. Entender el mundo, la naturaleza de los procesos que en él se desarrollan y sus interacciones pasa, en todas las civilizaciones, por las Matemáticas. En efecto, como dijo en su día R. Bacon, «Sin Matemáticas, las Ciencias no pueden ser entendidas, no se pueden enseñar, no se pueden aprender». No nos queda más remedio entonces que aprender de números, operaciones, sistemas métricos, regla de tres, resolución de sistemas simples de ecuaciones, geometría, y un largo etcétera. Y todo esto lleva mucho tiempo y esfuerzo, y sobre todo, las etapas no pueden quemarse, es necesario avanzar aumentando de manera paulatina el grado de complejidad de los conceptos y volver una y otra vez sobre los mismos, adquiriendo
- así una comprensión cada vez más profunda y consolidada.
- *¿Hay alguna razón por la que tengamos hoy que hablar de todo esto?* Las Matemáticas son muy antiguas y se llevan enseñando y aprendiendo siglos ¿No podíamos tener el problema de su enseñanza resuelto? Lamentablemente no es así. Y no solamente eso, sino que se puede afirmar, sin lugar a dudas, que su enseñanza atraviesa una coyuntura de crisis a todos los niveles. Las crisis («momento en que se produce un cambio muy marcado en algo...» según la acepción del diccionario de María Moliner) tienen también aspectos positivos puesto que son ocasiones excepcionales para pasar a estadios mejores y tienen la gran ventaja de hacernos redoblar esfuerzos. No cabe duda que estamos en un momento de intensos y marcados cambios en el ámbito de la enseñanza de las Matemáticas.
- *¿En qué nos afecta la crisis a todos?* La enseñanza secundaria ha cambiado mucho. Su universalización y extensión hasta los dieciséis años de manera obligatoria, que constituyen logros sociales históricos, ha modificado necesariamente su panorama. Sin duda las Matemáticas han sido una de las materias donde los cambios se han dejado sentir más. Resulta difícil, y esto ocurre también en las universidades, mantener los mismos programas que hace no mucho y es aquí posiblemente donde estos cambios a los que estamos haciendo referencia nos afectan a todos y, de manera notable, a todos los adolescentes que cursan estudios en la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO).
- *¿Es malo que se enseñen menos Matemáticas?* Más de uno respondería

así a la cuestión planteada antes, y con razón. Podría no parecer grave que los estudiantes aprendiesen menos Matemáticas, en la medida en que ahora saben más informática, manejan un teléfono móvil con una soltura envidiable para muchos adultos, etc. Habida cuenta de que el saber, a pesar de no ocupar lugar, sí que exige tiempo, es lógico que las Matemáticas salgan perdiendo. Pero, en este punto los profesionales deberíamos reivindicar que lo esencial quedase intacto. Los conceptos y reglas fundamentales deberían ser asimiladas. No parece lógico resignarse a una sociedad donde los ciudadanos manejan sofisticados artilugios tecnológicos, pero tienen serias dificultades para decidir cuánto queda de un pastel después de cortar un tercio y un cuarto del mismo.

- *¿Los alumnos más motivados y capaces para las Matemáticas encuentran en nuestro sistema educativo la formación que merecen?* En esta cuestión el panorama es un tanto sombrío, lo cual explica, en particular, los síntomas que se perciben en la universidad. Pero no es difícil entender lo que puede estar ocurriendo: si las Matemáticas han de llegar a todos, éstas necesariamente habrán de ser más simples. Pero no nos confundamos, no por ello han de ser más fáciles, y es un error pensar que se van a transmitir de una forma mágica, sin esfuerzo.

Estas cuestiones perfilan en grandes líneas algunos de los problemas que aparecen cuando hablamos de Matemáticas y de su enseñanza.

Como decíamos anteriormente, en los últimos años ha sido frecuente hablar de Enseñanza Secundaria, de las necesidades de reforma, y las Matemáticas siempre son protagonistas estelares de estos debates. A estas alturas pues, muchos, si no todos, te-

nemos opiniones a este respecto, a veces divergentes, y otras muy próximas unas de otras (lo cual no quita que después sea muy difícil poner estas ideas en práctica y hacer realidad cualquier reforma tangible o iniciativa de cambio o mejora). No podemos olvidar que nuestro sistema educativo posee una gran inercia, imprescindible por otra parte para ofrecer la tan necesaria robustez y estabilidad en su funcionamiento, que absorbe gran parte de las energías invertidas en los debates y procesos de cambio sin que eso redunde de manera palpable en cambios significativos en las aulas.

Este debate de ideas ha puesto de manifiesto la existencia de al menos dos corrientes de pensamiento que, aún a riesgo de caer en una excesiva simplificación, podrían describirse del modo siguiente:

- Una corriente más purista constituida por los que piensan que, a pesar de lo complejo de la situación, el punto clave sigue siendo el mantenimiento y adecuación de los contenidos necesarios para garantizar una educación matemática satisfactoria a la vez que se facilita, a través de medidas legislativas, que los estudiantes vayan diseñando unos itinerarios en los que, estando garantizados unos mínimos, puedan optar al grado de profundización que deseen en Matemáticas. Decisión en la que, obviamente, han de incidir, en particular, su gusto por y capacidad en el ámbito de esta disciplina, y la carrera profesional que en el futuro desee desarrollar.
- Una segunda corriente que, haciendo más énfasis en los aspectos didácticos, considera que la mayor fuente de problemas en la enseñanza de las Matemáticas radica en el exceso y complejidad de los contenidos y que las soluciones han de venir de reducir estos a la vez que se profundiza en la formación didáctica del profesorado. Es decir,

quienes consideran que si los estudiantes tienen problemas con las Matemáticas porque, por una parte, los matemáticos han hecho los contenidos innecesariamente complicados y, por otra, los maestros y profesores no han adquirido la destreza pedagógica suficiente para transmitir con claridad el dominio de las técnicas matemáticas.

Antes de continuar y con el objeto de clarificar cuanto antes nuestra posición, que constituirá el hilo conductor de este artículo, hemos de decir que nos sentimos mucho más cerca del primer estado opinión que del segundo. En efecto, si bien reconocemos que cualquier mejora en los aspectos metodológicos ha de ser bienvenida (comentaremos más adelante, por ejemplo, todo lo relacionado con los ordenadores) y que es preciso evitar el barroquismo de los contenidos (punto en el que también insistiremos más adelante), creemos que es importante mantener unos objetivos matemáticos claros en lo fundamental no muy distintos a los tradicionales. Opinamos asimismo que la manera más eficaz de alcanzarlos es la habitual, consistente en explicaciones claras por parte del profesorado y en el trabajo personal del alumno y que para esto las dos mejores recetas son: garantizar una buena formación matemática de los maestros y profesores, y el que el alumno ejercite los diversos temas a través de relaciones de problemas, como ha sido históricamente el caso. Por el contrario, nos cuesta aceptar que a base del empleo de nuevas metodologías didácticas por parte de los diversos cuerpos docentes, la operativa de los quebrados vaya a poder ser transmitida al alumno del mismo modo en que, por ejemplo, se describen las diferentes partes de un río, desde su nacimiento hasta su desembocadura, o el ciclo del agua desde que, saliendo del mar, vuelve al mismo.

En este punto cabe recordar la célebre frase de Santiago Ramón y Cajal en la que señalaba que «Al carro de la cultura espa-

ñola le falta la rueda de la Ciencia». La situación ha mejorado en este terreno pero queda aún mucho por hacer, y no sólo en el plano puramente metodológico.

El MECED en esta última legislatura y paralelamente al desarrollo de este debate en el seno de la comunidad matemática, ha tomado la iniciativa de manera decidida y ha sacado adelante una serie de proyectos que tienen como objeto una mejora sustancial de la calidad de nuestro sistema educativo. La última de ellas es la *Ley de la Calidad de la Educación* antes mencionada, aprobada y publicada recientemente en el BOE.

Sin embargo, es obvio que los problemas de la educación en una sociedad como la nuestra, que cambia tan rápido y de manera tan diversa y vigorosa, no se resuelven con meros cambios de leyes y normas, y se hace indispensable una reflexión de mucho más calado y envergadura que vaya creando una verdadera conciencia en nuestra sociedad sobre la relevancia de la educación en general y de la de las Matemáticas en particular.

Del mismo modo que las redes de carreteras, ferrocarriles o los aeropuertos se planean a 15 (o más) años vista, parece evidente que la educación necesita de una planificación sosegada que exige que todos y los políticos en particular aborden este tema con amplitud de miras, dejando de lado los intereses partidistas y anteponiendo los intereses de todos, padres e hijos, por que la educación mejore. Debemos también escapar definitivamente de la tentación de proceder de manera recurrente, de forma puntual, con prisas y sin la necesaria visión con perspectiva. Es evidente que, de manera excesivamente frecuente, estos errores y vicios no han sido debidamente evitados.

Lo que sigue en primer lugar es un breve esbozo de la situación de la Matemática en la actualidad, se comentan después algunas ideas sobre la situación de nuestro alumnado, de nuestros profesores y nuestro punto de vista sobre las Matemáticas que deberían enseñarse.

## LA REALIDAD MATEMÁTICA ACTUAL

Los avances que se han producido en el siglo XX en Matemáticas son notables. Este hecho es más que evidente cuando se analiza el estado actual del conocimiento en las disciplinas más importantes de las Matemáticas o se contempla el número de disciplinas emergentes con gran impacto. En realidad el avance ha sido tan significativo, que un siglo parece a todas luces una escala de medida demasiado grosera para realizar un primer análisis comparativo. Tal vez analizando la segunda mitad del siglo XX consigamos una perspectiva algo más clara del ritmo al que las Matemáticas han progresado.

Centrándonos ya en esta segunda mitad del siglo, detectamos que también en ella el progreso de las Matemáticas ha sido espectacular. Uno de los referentes más populares es sin duda la definitiva prueba del Teorema de Fermat<sup>5</sup> debida al matemático británico Andrew Wiles. Pero tal vez sea en otras áreas donde el progreso ha sido más importante, aunque no dispongan de una insignia tan sobresaliente. Como genuino representante de la segunda mitad del siglo XX cabe mencionar el mundo del Análisis Numérico, de la Simulación Numérica y de la Computación<sup>6</sup>. Apenas hace 40 años se trataba de un área incipiente. Hoy se trata de una disciplina científica tremendamente compleja y desarrollada y con una perspectiva de progreso aún mayor para el siglo que estamos estre-

nando. A ello han contribuido no sólo los progresos realizados en el terreno del Análisis Matemático orientado a la aproximación numérica<sup>7</sup> sino también, de manera decisiva, la espectacular expansión de los ordenadores, que han pasado en dos décadas de ser objetos raros y difícilmente manejables a compartir espacio con los electrodomésticos.

En la última década las Matemáticas han jugado también un papel muy significativo en diversos ámbitos del desarrollo tecnológico y social. Cabe mencionar por ejemplo la aplicación del Análisis de Fourier a la Teoría de la Señal, de las Ecuaciones en Derivadas Parciales al Tratamiento de Imágenes, o disciplinas emergentes como la Matemática Financiera.

Todo esto sugiere un panorama sumamente optimista en el que los avances que se han experimentado no son más que un augurio de lo que está por acontecer. A pesar de todo ello, sería un grave error ignorar que algunos de los problemas más clásicos e importantes están aún por resolver. Entre ellos cabe citar por ejemplo la unicidad y regularidad de las soluciones de las ecuaciones básicas de la Mecánica de Fluidos, las ecuaciones de Navier-Stokes<sup>8</sup> construidas en los años treinta por el recientemente desaparecido J. Leray.

Hay también aspectos sociológicos que han de ser tenidos en cuenta al hablar de las Matemáticas a día de hoy. Por ejem-

(5) Wiles, A.: *Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem*. Ann. of Math, 141(1995), pp. 443-551. Este es el trabajo en el que aparece la demostración definitiva del Teorema de Fermat. En su introducción se puede encontrar un interesante resumen sobre la historia del citado teorema.

(6) Áreas de investigación que en nuestro país se aglutinan en torno a la Sociedad Española de Matemática Aplicada (SEMA) y cuyos aspectos más relevantes se discuten y presentan en su Boletín periódico. La página web de SEMA: <http://www.uca.es/sema>.

(7) Área comúnmente denominada de Análisis Numérico. El lector interesado en una clasificación sistemática y exhaustiva de las diversas disciplinas matemáticas puede consultar la Clasificación de la American Mathematical Society (AMS) que podrá encontrar en la página web la <http://www.ams.org/msc/>.

(8) Este es uno de los siete problemas que constituyen los *Millenium Prize Problems*, un concurso internacional organizado por el Mathematics Clay Institute en el que se ofrece un millón de dólares para quien resuelva alguno de estos problemas. Para más información se puede consultar la página <http://www.clay-math.org>.

plo, no podemos olvidar el masivo acceso de una gran parte de nuestra juventud a la universidad, un fenómeno que podemos calificar sin duda alguna de «nuevo» y característico del último cuarto del siglo XX.

Estos dos factores, espectacular desarrollo de las Matemáticas y acceso masivo de los jóvenes a la Universidad, podrían parecer estar en contradicción o al menos ser generadores de fuertes tensiones: ¿Cómo una disciplina compleja como las Matemáticas y en permanente crecimiento y proceso de innovación puede ser accesible a un cada vez más amplio sector de nuestra sociedad?

Hay un hecho que hace posible que los dos fenómenos arriba mencionados, espectacular desarrollo de las Matemáticas y masivo acceso de jóvenes a la universidad, coexistan de manera no traumática: *lo esencial, lo básico, lo fundamental permanece intacto en el mundo de las Matemáticas*, tanto para aquella minoría que hará de ella su profesión como docente y/o investigador, como para aquellos que tengan a las Matemáticas como instrumento cotidiano en el estudio o ejercicio de otras ciencias o disciplinas técnicas.

Desde esta perspectiva y a la hora de realzar, por ejemplo, un listado de los conocimientos que el alumno habrá debido adquirir a la hora de comenzar una carrera científica o técnica en nuestras universidades, conviene, en nuestra opinión, adoptar un punto de vista «conservador» puesto que estas competencias o conocimientos básicos son esencialmente los mismos de hace veinte años, época en la que comenzaron a cuajar los esfuerzos por hacer resurgir las Matemáticas en nuestro país. Obviamente hemos de indicar que esta persistencia en los contenidos ha de ir acompañada de una adaptación en los modos de enseñar las Matemáticas que hagan que éstas se mantengan atractivas para los alumnos más capacitados e interesados, a la vez que se hacen más accesibles a la mayoría, tarea difícil de la que hablaremos en las siguientes secciones.

Cuando se habla de métodos de enseñanza es imposible no mencionar los orde-

nadores. En efecto, el mundo de los ordenadores y de la computación en general, hoy en día, irremediablemente, acompaña a las Matemáticas. Es evidente que el ordenador personal ha de ser cada vez más un elemento de apoyo en el aprendizaje y comprensión de las Matemáticas. Una utilización audaz del ordenador como elemento de apoyo a la docencia debería sin duda contribuir a una mejor comprensión del alumno de procesos como el límite y la derivada o la geometría del plano y del espacio. Pero no conviene sustituir los contenidos de Matemáticas por el manejo del ordenador, y aquí se entra en un conflicto difícil de resolver, vista la escasez de horas disponibles para la docencia de estas disciplinas. De todos modos, y ante los vertiginosos avances que veremos en los próximos años, hemos de ser conscientes que la irrupción de los ordenadores producirá también de manera sutil, pero sin duda perceptible a medio y largo plazo, un cambio en los contenidos docentes.

Por ejemplo, en la universidad, comienza a ser habitual que las clases de algunas de las asignaturas de Matemáticas vayan acompañadas de, y se vean completadas por, clases prácticas o por laboratorios en los que se utiliza el ordenador ejercitando nociones matemáticas básicas mediante la programación y, sobre todo, el uso de paquetes específicos de software matemático. Se trata de una experiencia a promover y racionalizar y también a trasladar a nuestras escuelas e institutos. Conviene sin embargo no bajar la guardia en el terreno del tan controvertido «rigor matemático» y dejar claro en qué momento y con qué objeto el ordenador se convierte en un aliado legítimo. Con esta precaución y salvedad conviene fomentar y ordenar la exploración al máximo de esa vía, máxime porque, si no se hace hoy un esfuerzo de incorporación rigurosa del ordenador al mundo de las Matemáticas en nuestros centros educativos, los ordenadores pueden acabar suplantando a las Matemáticas en algunos

ámbitos, y más preocupante aún, el alumno puede acabar llegando a la errónea conclusión de que las Matemáticas se reducen a lo que meramente puede ejecutarse y visualizarse a través del ordenador.

Antes hemos citado ese aparente conflicto entre la universalización de la enseñanza, incluso al nivel universitario, y el mantenimiento de los contenidos y su profundidad. Se trata de una cuestión sobre la que se podría, y posiblemente convendría, hablar mucho y desde diversos puntos de vista. En particular cabría analizar la supuesta bajada en el nivel de las Matemáticas que se enseñan en nuestras escuelas, institutos y universidades y el impacto internacional de nuestra investigación matemática. Un estudio reciente<sup>9</sup> llevado a cabo por las Sociedades Matemáticas españolas, coloca a España entre los diez países más productivos con una producción superior al 4%. En este sentido, la International Mathematical Union<sup>10</sup> (IMU) ha decidido recientemente que el próximo Congreso Internacional de Matemáticos, se celebre en Madrid en 2006. Los ICM (International Congress of Mathematicians), coordinados por la IMU, tienen una tradición de más de cien años, se celebran cada cuatro y se trata de uno de los eventos más importantes en el mundo de las Matemáticas. En particular, en ellos se entregan los premios denominados Medalla Fields, que constituye el máximo galardón internacional a la investigación en Matemáticas. Sin duda este hecho es un claro reconocimiento de la comunidad internacional al nivel que está alcanzando la investigación matemática en nuestro país. Pero conviene no bajar la guardia, pues, en gran medida, este éxito

presente en el ámbito de la investigación está fundamentado en la tarea docente realizada desde hace más de dos décadas, y conviene por tanto cuidar al máximo nuestro sistema educativo si se quiere mantener el nivel que estos indicadores señalan. No es en absoluto incompatible este reconocimiento a nuestra labor investigadora con el deterioro de las Matemáticas en los diversos ámbitos de la enseñanza.

## SOBRE CÓMO, QUÉ Y A QUIÉN SE ENSEÑA

### DIVERSIDAD DE ALUMNOS, Y ¿DE PROFESORADO?

Creemos que no es posible hablar simultáneamente de los alumnos que muestran más facilidad y afición por las Matemáticas, y que posteriormente estudiarán probablemente una carrera de Ciencias o una Ingeniería, y de aquellos otros que, ya con 12 años, comenzaron a alejarse definitivamente de esta materia y orientaron sus intereses hacia otros temas. Del mismo modo, creemos que el tratamiento de estos alumnos ha de ser diferente. En la recién aprobada *Ley de Calidad* se habla de diversos itinerarios en el segundo ciclo de la Enseñanza Secundaria Obligatoria:

- Dos en tercer curso: Tecnológico y Científico-Humanístico,
- Tres en cuarto curso: Tecnológico, Científico y Humanístico.

Creemos que es en este marco, donde se puede dar un tratamiento diferenciado, que hasta ahora no se ha dado<sup>11</sup>, a los alum-

(9) Andradras, C. y Zuazua, E. (Coords.): *La investigación matemática en España en el periodo 1990-1999*. Madrid Real Sociedad Matemática Española, Societat Catalana de Matemàtiques, Sociedad de Estadística e Investigación Operativa y Sociedad Española de Matemática Aplicada, 2002.

(10) Se puede encontrar información relativa a los ICM en la página web de la IMU: <http://www.mathunion.org>.

(11) Si bien es cierto que en algunos centros ya se habían puesto en marcha medidas parecidas a los itinerarios para poder ofrecer un tratamiento diferenciado a los alumnos (en algunos casos, llamándolos incluso con este mismo nombre) con un marco legal que no lo contemplaba aun.



nos con diversos intereses con respecto a las Matemáticas.

Veamos algún ejemplo que justifique y sustente este punto de vista. Muchos estudiantes serían capaces de resolver el siguiente problema: *evaluar la función  $y = x^2$  en los puntos  $x=1,2,3$* . Pero quizá no tantos sean capaces de entender que esta fórmula algebraica  $y = x^2$ , es una manera de codificar un sin fin de relaciones, que manipular esta relación puede ser menos costoso que manejar un gran número de datos, y que dicha relación puede tener algo que ver con una trayectoria parabólica en el plano. O, por usar un ejemplo más próximo a la realidad cotidiana, muchos estudiantes saben calcular cuanto supone el 15% de una cantidad, pero quizá tengan algunas dificultades para saber qué tanto por ciento supone una subida de un 15% anual en el precio de la vivienda durante cuatro años consecutivos.

En este punto conviene no engañarse ni confundir términos: aunque el Álgebra sea una herencia de la Grecia y el Oriente antiguos puede que no resulte de acceso fácil a buena parte de la población, como posiblemente no lo serían las marcas atléticas de los griegos en las primeras Olimpiadas.

Obviamente, a este problema de la diversidad de los alumnos se suman otros relacionados con la formación de nuestro profesorado.

En los Centros de Formación del Profesorado de Primaria las asignaturas de Matemáticas han desaparecido prácticamente, para ser sustituidas por las de Didáctica de la Matemática, que incluso en el mejor de los casos no llegan al 5% de la carga lectiva de dichos estudios. Es en este punto donde con más claridad se perciben los efectos del diagnóstico que mencionábamos en la primera sección, en gran medida opuesto al que desgranamos en este artículo, según el cual el problema de los maestros no es entender y conocer mejor las Matemáticas para así garantizar una mejor enseñanza de las mismas sino,

simplemente, adquirir las destrezas que permitan transmitir estos conocimientos con facilidad y, por supuesto, con un hipotético éxito que los sistemas tradicionales no han llegado a alcanzar.

Reconociendo el mérito y el esfuerzo de los que defienden esta vía, y estando, como hemos mencionado anteriormente, a favor de incorporar en nuestro sistema educativo todos los medios y elementos metodológicos necesarios para garantizar una mejor calidad de la enseñanza, creemos sinceramente que este tipo de diagnósticos nos alejan frecuentemente de la solución. Por ejemplo, el dominio de las operaciones básicas con quebrados exige trabajo personal, bien orientado, pero sobre todo a base de práctica y ejercicios, y aún no se conoce el método ni la estrategia didáctica que permita transmitirlo del modo que todos deseáramos, como una imagen por internet, por poner un ejemplo cotidiano.

La realidad cotidiana de un profesor de Matemáticas de primaria, de secundaria o de universidad, a veces tiene muy poco que ver con el tipo de cuestiones que ocupan a quienes defienden estos posicionamientos. Efectivamente, cualquier método deja de servir y resulta insuficiente al profesor que ha de explicar la derivada sin haber comprendido su genuino y último sentido.

Reconocemos la buena voluntad de los que piensan que las dificultades con las que un profesor se encuentra a la hora de transmitir los conceptos matemáticos son consecuencia de la ausencia de herramientas didácticas. Sin duda éstas son importantes y útiles, pero ninguna herramienta resulta más útil que una profunda comprensión del concepto matemático que se enseña.

En la actualidad un número muy importante de los alumnos que acceden a los estudios de magisterio cursaron Matemáticas por última vez en cuarto de la ESO. De este modo, si en la universidad no cursan

prácticamente ninguna asignatura de contenido matemático, va a ser muy difícil que sepan qué enseñar, aunque sepan cómo. Creemos que este es un problema muy serio, y que es necesario abordar de manera urgente. No estamos diciendo que un maestro de primaria deba conocer aspectos sofisticados del Análisis Matemático o la Topología, pero sí que no dude sobre el significado del teorema de Pitágoras, clave para entender toda la Geometría Euclídea.

Creemos que una buena forma de acceder a una mayor experiencia y destreza didáctica por parte de los maestros quizá sea aumentar las prácticas, correctamente tuteladas, en centros de enseñanza con alumnos a los que se va a enseñar. Esto mismo sería válido para los licenciados aspirantes a profesores de Matemáticas de secundaria. En este sentido, el diseño del nuevo Título de Especialización Didáctica, previsto en la *Ley de Calidad*, debería apuntar en esta dirección. Conviene en este punto tener en cuenta que el vigente Curso de Aptitud Pedagógica (CAP) que debían superar los licenciados en Ciencias, para después poder participar en las oposiciones de profesores de Matemáticas de secundaria, no ha cumplido los objetivos para los que fue diseñado y se ha convertido en muchas ocasiones en un simple trámite burocrático.

### **¿ENSEÑANZA CALCULÍSTICA O DE LOS CONCEPTOS?**

Si hay muchos alumnos que, por diversas razones, no están capacitados para acceder al pensamiento formal de manera inmediata, el profesor de Matemáticas, ¿tendrá que limitarse a enseñar recetas y evaluar la eficacia del alumno en su aplicación?

La cuestión no es simple puesto que es ejercitando suficientemente los aspectos operacionales como el ser humano es ca-

paz de entender la lógica subyacente, y de ese modo adquirir una comprensión abstracta, más global y duradera, que le permita abordar con autonomía problemas más complejos. Los aspectos mecánicos y los abstractos van, por tanto, unidos y es difícil establecer una línea divisoria.

¿Cuál es la mejor manera de que un alumno puede aprender el sentido y las técnicas de la teoría de la integración? Probablemente resolviendo una lista de cincuenta integrales bien elegidas. En algunos casos esto conducirá a que el alumno maneje con soltura los aspectos operativos. En otros, el alumno acabará descubriendo de manera inconsciente que la integración es un proceso de inversión de la derivación y comprenderá la motivación y significado de fórmulas a la vez tan simples y enigmáticas como la de «integración por partes» y su relación con la de derivación del producto de funciones.

Por tanto creemos que nada tenemos que temer de una enseñanza calculística, orientada a proporcionar al alumno la soltura necesaria para desenvolverse en el mundo de la aritmética.

No es la primera vez en la historia de la educación que esta cuestión se debate. Estamos entre los que, en los años setenta, estudiamos la Matemática Moderna por primera vez en la Educación General Básica. Fue a la vez triste e ineficaz alejarnos de las Matemáticas de los números para adentrarnos prematuramente en la Teoría de Conjuntos.

La Matemática Moderna se introdujo en aquella época en nuestro sistema educativo partiendo de dos principios: los de la Psicología Evolutiva y una fuerte corriente Matemática empeñada en enterrar las Matemáticas<sup>12</sup> clásicas para sustituirlas por un engranaje lógico/abstracto.

Esta corriente ha ido perdiendo peso en las últimas décadas tanto en el ámbito

(12) Corriente simbolizada por la famosa frase de J. Dieudonné ¡Abajo Euclides!.

de la investigación como de la enseñanza, y el fracaso de lo que se denominó la Matemática Moderna es hoy patente. Pero hoy en día existen otras tendencias, como por ejemplo las de la Matemática «novísima», «fuzzy», etc., que entrañan los mismos riesgos que la anterior, o incluso alguno más, puesto que ahora se pretende además que las «Matemáticas son fáciles y divertidas» para hacerlas más populares. Con toda seguridad componer canciones con «presunto contenido matemático» puede resultar más divertido que enseñar a resolver ecuaciones, pero no conviene confundir una clase de matemáticas con otra cosa. Efectivamente, las Matemáticas pueden resultarnos divertidas a algunos y así es, pero puede que no lo sean para todo el mundo, y esto es una realidad que hay que reconocer. En lo que respecta a la facilidad, todo Matemático profesional sabe que ésta se acaba cuando uno se enfrenta a un problema suficientemente difícil. Así, la línea divisoria entre lo fácil y lo difícil es algo personal que depende fuertemente del individuo.

En este punto surge de manera natural la siguiente cuestión: ¿Hasta donde pueden avanzar juntos los alumnos si algunos de ellos nunca llegarán más allá de manipular las cuatro reglas básicas (suma, resta, multiplicación y división) mientras que otros realizarán estudios universitarios de Ciencias?

A la hora de reflexionar sobre esta cuestión conviene también no perder de vista que el alumno tiene derecho a escuchar del profesor una explicación conceptual y abstracta suficiente y motivada para que, en caso de que esté en condiciones de hacerlo, ir más allá del simple manejo de la regla.

En una entrevista que se realizó a José Antonio Marina hace ya algunos años, cuando aún no había recibido el reconoci-

miento que hoy tiene, denunciaba que la Filosofía de nuestros institutos se estaba convirtiendo en una mera Historia de la Filosofía, en un anecdotario de nombres y fechas y no en lo que realmente debería ser: el estudio de las grandes ideas del pensamiento humano y su evolución.

Lo mismo podría decirse de lo que desde algunos ámbitos se hace con las Matemáticas. Conviene pues ser sumamente rigurosos a la hora de establecer la línea divisoria entre divulgación y educación, y esto es una tarea que compete en primer lugar a los propios profesionales de las Matemáticas y su enseñanza.

### ¿PROGRAMAS DE MÍNIMOS O DE MÁXIMOS?

En la actualidad, Howard Gardner<sup>13</sup>, por ejemplo, habla de inteligencias múltiples y cada vez conceptos como los de inteligencia emocional están cada vez más asumidos. Eso es una muestra de reconocimiento y respeto a la diversidad de la naturaleza humana y tiene mucho de bueno en la medida en la que, aspectos que pertenecen más al mundo de la naturaleza, de la sensibilidad, de las relaciones humanas, adquieren valor frente a la Ciencia y a la Técnica.

Pero la única manera de compatibilizar estas constataciones de diversidad con una enseñanza universal es ofreciendo también un trato individualizado y distinguido a cada alumno garantizando, eso sí, unos mínimos comunes.

Eso justifica plenamente la necesidad de los programas de mínimos que recientemente han sido revisados en los Reales Decretos mencionados más arriba, lo que ha permitido algunas mejoras, sobre todo en lo que se refiere a la Enseñanza Secundaria Obligatoria.

Pero en la medida en que el trato individualizado a día de hoy es inexistente,

(13) Ver Gardner, H: *Multiple Intelligences: The Theory in Practice*. Nueva York, BasicBooks, 1993.

esto hace que, automáticamente, los programas de mínimos lo sean de máximos.

Surge entonces un grave problema: no se ofrece a cada estudiante la posibilidad de desarrollar al máximo sus capacidades y, entonces, en nuestra opinión, se incurre en una grave irresponsabilidad.

Las autoridades, por tanto, han de decidir:

- ¿Se puede implementar la enseñanza individualizada que la normativa vigente promete? y, posteriormente, ¿actuar en consecuencia?
- En caso de que la respuesta sea negativa: demos una alternativa. Las posibilidades son múltiples:
  - Asumir que unos programas de mínimos a la baja son de máximos. ¿Estamos dispuestos?, ¿renunciamos a que nuestros hijos tengan cerca de casa la educación que podrían tener en Lisboa o en París?
  - Implementar un modelo de atención distinguido, aunque posiblemente no individualizado.

Esta última posibilidad, la más darwinista de las existentes, es probablemente la más próxima al realismo, aunque las ideas que se inspiran en la Psicología Evolutiva sean posiblemente más atractivas.

Son muchos los profesionales comprometidos de la Enseñanza de las Matemáticas los que opinan que esa hipotética «enseñanza individualizada» es algo de carácter bastante retórico, como aquello de que «todos tenemos derecho a la vivienda...». Las cuentas son muy sencillas, en una clase con 20 alumnos con tres sesiones semanales de cincuenta minutos, si todo fuese individualizado a cada alumno le corresponden siete minutos y medio a la semana.

## **SOBRE QUÉ ENSEÑAR**

Durante la puesta en marcha de la LOGSE y su desarrollo posterior, ha resultado muy

complicado hablar sobre lo que había que enseñar. En primer lugar, en las directrices oficiales resultaba bastante difícil encontrar de una manera precisa los contenidos que un alumno debía saber en cada curso, en cada nivel. Más aun, ciertas opiniones apuntaban que lo importante no era el qué, sino el cómo. Parece que todo lo importante giraba en torno a los procedimientos y actitudes: el alumno debía apreciar la belleza, debía tener una actitud positiva hacia las Matemáticas, etc. Creemos que todas estas intenciones son buenas pero, ¿son algo más que intenciones? Es preciso hablar también de qué enseñar, incluso aunque esto sea arriesgado, y de eso queremos hablar. Indicaremos por tanto las que, a nuestro juicio deberían ser competencias básicas, de un alumno en Matemáticas en los diferentes niveles de la Educación Secundaria.

## **ENSEÑANZA SECUNDARIA OBLIGATORIA**

Creemos que un alumno, al acabar la Enseñanza Secundaria Obligatoria, en Matemáticas debería:

- Dominar las cuatro reglas: suma, resta, multiplicación y división.
- Tener una idea bastante precisa de las fracciones y de su manipulación.
- Convendría también que fuese capaz de utilizar «la regla de tres». Lamentablemente, ni siquiera se hace referencia explícita a ella en los programas actuales, quizás por la inercia a la que nos habíamos acostumbrado. Nótese que en las programaciones anteriores era difícil encontrar, por ejemplo, la palabra Geometría.
- Asimismo, se debería garantizar que fuesen capaces de calcular áreas y volúmenes de los objetos geométricos elementales y dominar el sistema métrico decimal.
- Se debería incidir especialmente en los aspectos del cálculo, aunque a

veces no sea divertido ni aprenderlos ni enseñarlos. En este sentido, convendría no confundir la enseñanza/estudio de las Matemáticas con su divulgación o incluso con su vulgarización.

### **BACHILLERATO. A LAS PUERTAS DE LA UNIVERSIDAD**

Aquí conviene distinguir dos tipos de alumnos: los alumnos que eligen la opción modalidad de Ciencias y Tecnología, y los que eligen la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales.

En cuanto al alumno que elige la modalidad de Ciencias, y que puede acceder en consecuencia a una carrera con contenido científico, creemos que, al acabar el Bachillerato, debería:

- Saber calcular con soltura límites y derivadas elementales.
- Ser capaz de hacer un esbozo con los aspectos más representativos de una función.
- Conocer los aspectos esenciales de la trigonometría.
- Saber traducir al lenguaje algebraico situaciones reales.
- Haberse iniciado en la Geometría Analítica: puntos, rectas, vectores. Prestando más atención a los aspectos intuitivos que a las estructuras algebraicas que subyacen a estos conceptos.
- Tener unos conocimientos básicos de Estadística Descriptiva y Probabilidad.

En el caso del alumno de Humanidades y Ciencias Sociales, se debería insistir más en las aplicaciones de los conceptos. Quizá no sea tan importante en este caso el dominio de la Geometría Analítica, pero sí quizá haya que profundizar más en las cuestiones de Estadística. No obstante, creemos que, a pesar de que conviene comenzar a dar a la Matemática Discreta la importancia que tiene, ya que se trata de disciplinas cada vez más presentes en el

mundo de la Ciencia, de la Tecnología y en el ámbito empresarial que normalmente han quedado en un segundo plano en la enseñanza secundaria, conviene simplificar al máximo los elementos que se enseñen en estas disciplinas. Quizás sea excesivo el tratamiento actual de la Estadística Inferencial (intervalos de confianza, contraste de hipótesis) para las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales, que se hacía en las programaciones anteriores y que se vuelve a repetir en la nueva legislación de mínimos.

En otro orden de cosas, creemos fundamental simplificar los actuales recorridos que el bachillerato ofrece y evitar que un estudiante pueda llegar a la carrera de Matemáticas o de Química sin haber cursado las materias correspondientes en el último año del bachillerato. No parece que estos problemas se hayan corregido con la estructura del bachillerato a partir de la nueva normativa.

También creemos importante revisar la oferta de asignaturas optativas y simplificarla o reducirla a lo estrictamente necesario, esto también es importante en la ESO.

### **LA SELECTIVIDAD Y/O LA PRUEBA GENERAL DE BACHILLERATO**

Todos sabemos que, por mucho que definamos y redefinamos los programas de las asignaturas, lo que el profesor va realmente a enseñar y, sobre todo, aquello por lo que el alumno se va a interesar, está completamente determinado por los contenidos que se evalúen.

En este sentido, y refiriéndonos al Bachillerato, la Selectividad ha sido el máximo referente puesto que ha determinado, en una sola prueba, en un 40%, la nota que, a su vez, condicionaría el futuro universitario de nuestros jóvenes.

De este modo, la Selectividad ha jugado tradicionalmente el papel de «dique de contención», de garante de los mínimos a los que nuestro sistema educativo no estaba dispuesto a renunciar.

Con la *Ley de Calidad*, la Selectividad queda sustituida por la llamada Prueba General de Bachillerato. Conviene abordar con rapidez los mecanismos por los que se regirá la nueva prueba. Al hacerlo, es importante tener en cuenta los defectos que la Selectividad en sus últimos años de andadura ha presentado. En este sentido tenemos la impresión de que la Selectividad y los tribunales que han venido preparando estas pruebas han estado inmersos en una dinámica un tanto reiterativa que posiblemente en ocasiones ha alejado esta prueba de lo que debería haber sido: una prueba que evaluase las capacidades básicas del alumno y su preparación para adaptarse a un medio universitario, donde el estudio exigirá no sólo de bases sólidas sino también de un buen dominio del lenguaje escrito y de una buena dosis de capacidad de abstracción y de asociación de ideas. En este sentido, la Selectividad, como la mayoría de las pruebas que se establecen en nuestro sistema educativo, ha pecado de buscar enunciados de problemas artificialmente complejos, que a veces acababan resultando confusos. Este proceso ha estado, sin duda, relacionado con el modo en que han venido constituyéndose las comisiones que preparaban estas pruebas, sin que, frecuentemente, se haya garantizado la necesaria motivación y renovación de sus componentes.

Las ideas matemáticas fundamentales son simples, lo cual no significa que sean fáciles de entender. Como decía Albert Einstein, «todo debería hacerse tan sencillo como sea posible, pero no más». Una buena comprensión de estas ideas matemáticas necesariamente ha de ir acompañada de una capacidad de simplificación en su abordaje. Los exámenes ya sean de selectividad o de cualquier otro tipo han de traslucir una claridad de ideas por parte de los preparadores en lo que respecta a los aspectos básicos que no siempre se da.

Por otra parte, es evidente que en Matemáticas resulta imposible un avance real

en el aprendizaje si no se dispone de una buena capacidad de cálculo. Es por tanto evidente que es pertinente realizar una evaluación rigurosa de la misma.

Pero nuestros exámenes, en todos los niveles, confunden frecuentemente la profundidad de las ideas y la complejidad de los cálculos con un barroquismo verbal que tiene dos efectos claros: el examen acaba no sirviendo para evaluar adecuadamente, y confunde incluso a los alumnos más aventajados.

La práctica demuestra que muy rara vez el alumno llega a la universidad dominando las materias establecidas en los programas del Bachillerato. Pero esto no es grave siempre y cuando el alumno domine una serie de conceptos fundamentales y haya desarrollado una capacidad suficiente de cálculo. A modo de ejemplo, en el ámbito del Análisis, cabe decir que un alumno que sepa hacer límites, derivadas e integrales, estará en perfectas condiciones de superar el primer curso de carrera sin dificultad, a pesar de que aún no haya estudiado sucesiones, no maneje con soltura los teoremas de Rolle y del valor medio o no haya asimilado la integral como instrumento para el cálculo de áreas. La maduración que conduzca a la comprensión de estos elementos muy bien puede producirse durante los primeros meses en la universidad.

#### ALGUNOS TÓPICOS Y USOS A REVISAR

Como filosofía general y a modo de hilo conductor de las diversas iniciativas en materia educativa creemos que siempre se ha de garantizar que cada alumno tenga la educación en Matemáticas para la que está capacitado y a la que está dispuesto a hacer frente. Pero se trata en gran medida de una declaración de intenciones y en la práctica es un problema de solución compleja y difícil al que, a pesar de dedicar buena parte de este artículo, somos conscientes que no respondemos de manera definitiva.

En cualquier caso, a la hora de abordar esta cuestión creemos que es importante desmontar algunos de los tópicos que perturban normalmente los debates y que sin embargo suelen carecer de base sólida. En esta sección comentamos algunos de ellos.

- La guerra de las horas. Creemos que no conviene caer en «las guerras de horas», «3 versus 4 horas de Matemáticas». Cuatro horas pueden ser demasiadas o demasiado pocas. Por lo tanto pensamos que es mejor diversificar la oferta en el número de horas y el grado de profundidad con el que se van a estudiar las Matemáticas.
- El volumen de información. Nuestros jóvenes no necesitan un exceso de información, sin duda un problema creciente en nuestra sociedad. Pero sí necesitan desarrollar sus propios criterios, su voluntad para poder elegir en un mundo cada vez más complejo.
- Los ordenadores. No es posible hablar de información en la sociedad actual sin mencionar los ordenadores e Internet. Hoy en día uno de los tópicos y lemas más comunes es recurrir a medidas del tipo «un ordenador en cada aula». Por supuesto creemos que un ordenador puede resultar un elemento de trabajo enormemente útil, que puede incluso incidir en un futuro inmediato en las metodologías didácticas a emplear. Pero conviene desmitificar este tema y establecer un orden de prioridades riguroso y alejado de las modas. Así, nos atreveríamos a decir que, un ordenador en cada aula sí, pero antes tal vez un pincel y un caballete, una buena obra literaria, un buen libro de Geometría básica, etc. Los ordenadores son instrumentos inseparables del ser humano en el quehacer científico-

tecnológico. Se trata de una máquina de experimentación, de apoyo. Pero cuando enseñamos a pescar a un niño, ¿ponemos en sus manos la caña el primer día? ¿La manera de aprender la Química es dejar al alumno suelto en el laboratorio? Apliquemos entonces el sentido común y no llevemos al terreno de las Matemáticas lo que obviamente no adoptaríamos en ningún aspecto de la vida y la educación. El ordenador por tanto ha de introducirse de manera muy prudente en la enseñanza de las Matemáticas sin que acabe suplantándolas.

- Los libros de texto. El tipo de textos que hoy se edita son excelentes para el profesor. Están llenos de gráficos, de datos históricos, de aplicaciones, etc. Pero es poco probable que textos de semejantes dimensiones atraigan la atención del alumno, condicionado por la diversidad de materias, de la frecuencia de los exámenes, y la falta de tiempo que el ritmo de vida actual imprimen incluso a los niños y adolescentes. Tal vez fuese conveniente editar junto con estos excelentes textos, manuales más breves que atrajesen más fácilmente el interés inmediato del alumno. Lamentablemente, en la actualidad dos o tres editoriales lideran el mercado con unos determinados libros, y el resto se limita a intentar imitarlas. La originalidad brilla por su ausencia.
- Las aplicaciones de las Matemáticas. Queremos llamar la atención del modo en que algunas aplicaciones de las Matemáticas se presentan en los textos. Por ejemplo, las aplicaciones de la Programación Lineal a lo que hoy se denominan las Ciencias Sociales datan de los años cincuenta y hay Matemáticas muy simples y bonitas en torno a estos

temas que se pueden enseñar. Resulta sorprendente ver que a veces estas aplicaciones se presentan como si fuesen de última generación, y lo es más aún cuando se pretende justificar a través de ellas la necesidad de cambios en los contenidos de los currícula, o de tipo metodológico.

- Temarios de oposiciones. Hay temas muy interesantes en Matemáticas, como por ejemplo los fractales, que se pusieron de moda hace algunos años en nuestro país, hasta el punto de figurar incluso entre los temas para las oposiciones de profesores de secundaria<sup>14</sup>. Sorprende sin embargo que no haya ninguna referencia en estos temarios a las Ecuaciones Diferenciales, aun estando estas históricamente asociadas a la invención del Cálculo. Son muchas las ramas de la investigación matemática contemporánea interesantes, pero creemos que hay que tener una cierta prudencia a la hora de su incorporación a la enseñanza secundaria (bien sea de una manera directa), en los contenidos mínimos, como indirecta (mediante su inclusión entre las materias de las que se examinará el futuro profesor de Matemáticas).

## A MODO DE CONCLUSIÓN

De todo lo anterior se desprende, y esto creemos que es compartido por todos, que la situación de la enseñanza de las Matemáticas no es la óptima en nuestro país. Y, esto ya es una opinión quizá no compartida, la situación se ha deteriorado por múltiples factores. ¿Qué hacer?, aceptando que algo ha de cambiar ¿cómo hemos de articular esos cambios?

La batería de posibles medidas que frecuentemente se barajan es bastante amplia. Más arriba hemos hecho referencia a algunas de ellas. Pero a menudo éstas se reducen a las más obvias e inmediatas. La primera a la que se recurre es siempre aumentar el número de horas lectivas de Matemáticas. A este respecto diríamos que, si bien recuperar el terreno perdido en este ámbito puede ser deseable, no parece que los profesionales de las Matemáticas podamos liquidar la cuestión exigiendo más horas. La problemática a la que nos referimos es común a muchas otras materias y es evidente que el número de horas lectivas total es en cualquier caso limitado. Por otra parte, la Enseñanza Secundaria no tiene como objetivo generar mini-investigadores en todas las áreas, sino formar personas y conviene no perder de vista este hecho para no reducir el problema de la enseñanza de las Matemáticas a una guerra de horas. Por otro lado, hay quien opina que lo que falta es personal de apoyo para hacer realidad los planteamientos de la LOGSE, que prometía un tratamiento personalizado de los alumnos en función de sus necesidades y potencial. Por supuesto, un refuerzo en la plantilla educativa siempre permitiría un mayor margen de maniobra. Pero, tampoco sería honesto reducir el problema a una guerra de cifras económicas.

Creemos que, con independencia de que este tipo de iniciativas, basadas en el aumento de la inversión y del número de horas salgan adelante, convendría ir un poco más allá en el análisis de la cuestión.

No conviene olvidar que lo esencial de las Matemáticas se mantiene prácticamente invariable, como hemos mencionado anteriormente, y que, por tanto, los cambios en la forma de enseñar que las nuevas tecnologías traerán en los próximos años, no de-

(14) Para ver el temario Matemáticas de las últimas oposiciones a profesores de secundaria se puede consultar la página web: <http://www.mecd.es/inf/comoinfo/a-5-2-33.htm>.



ben alterar los contenidos básicos y habrá que seguir ejercitando el cálculo y la memoria como hemos hecho nosotros y nuestros antecesores. En nuestra opinión, como decíamos más arriba, una buena enseñanza de las Matemáticas en el ciclo obligatorio ha de proporcionar al alumno destreza en el cálculo de las cuatro reglas y números quebrados sencillos, en el uso de la regla de tres, las proporciones y del sistema métrico decimal, así como las nociones básicas de Geometría elemental.

Las últimas estadísticas sobre fracaso escolar indican que nuestro sistema actual no garantiza esos mínimos. ¿Qué porcentaje de alumnos que no saben usar la regla de tres y el sistema métrico decimal está asistiendo a clases en las que el programa incluye cálculo de derivadas?

Por otra parte, conviene observar las nuevas tecnologías, la sociedad de la información, las nuevas metodologías de enseñanza que prometen el aprendizaje con menos esfuerzo, etc., con disposición para integrar los aspectos positivos que puedan tener, pero sin bajar la guardia, con espíritu crítico. El jugador de golf Gary Player decía en unas declaraciones: «cuanto más trabajo y practico, más suerte parece tener». No hay aprendizaje sin esfuerzo y conviene pues no olvidarlo.

Asimismo, deberíamos habilitar un modo para que, los alumnos deseosos de adquirir una formación matemática de alto nivel, competitiva, tuviesen oportunidad de hacerlo, tal y como ocurre en los países vecinos. Pero debería tratarse de una solución robusta y extensiva a todos los estudiantes, sin caer en la contradicción de hacer compatible la intransigencia ante cualquier iniciativa que tenga como objeto establecer diversos itinerarios en función de aptitudes, para después fomentar iniciativas privadas que sólo alcanzan a unos pocos.

Las posibles soluciones son diversas, y la responsabilidad de adoptarlas es tanto de los políticos y quienes ostentan responsabilidades de gobierno y gestión introduciendo los cambios necesarios en la normas educativas, como de todos los profesionales de las Matemáticas en nuestro ámbito de acción.

Trabajemos pues para combatir el analfabetismo numérico y establezcamos las condiciones para que en nuestras aulas los jóvenes encuentren el ambiente adecuado que estimule su afición (a veces pasión) por las Matemáticas, y desarrollemos unos programas y métodos serios y rigurosos que les garanticen el acceso a los conocimientos que puede alcanzar en condiciones favorables su joven, vigorosa y prometedora inteligencia.

Para concluir nos gustaría reproducir las frases con las que la profesora Soledad Rodríguez acababa su artículo «El Analfabetismo numérico y el 2000»<sup>15</sup>:

...hemos de volver a insistir en que debemos hacer reflexionar a los estudiantes para que desarrollen su inteligencia, debemos forzar la repetición para que desarrollen su memoria y debemos imponer una disciplina en el método para fortalecer su voluntad. Eso, sin duda alguna, contribuirá a erradicar el analfabetismo numérico y a que en el próximo siglo tengamos estudiantes con más autoestima y ciudadanos más cultos

## BIBLIOGRAFÍA

- ANDRADAS, C. y ZUAZUA, E. (Coords.): *La investigación matemática en España en el periodo 1990-1999*. Madrid, Editado por Real Sociedad Matemática Española, Societat Catalana de Matemàtiques, Sociedad de Estadística e Investigación

(15) Artículo aparecido en el diario El País, el 12 de julio de 1999. También se puede consultar en la dirección <http://www.uc3m.es/uc3m/dpto/MATEM/docs/ceamm/pais12.7.99.html>.

- Operativa y Sociedad Española de Matemática Aplicada, 2002.
- BOCHNER, S.: *El papel de la matemática en el desarrollo de la ciencia*. Madrid, Alianza Editorial, 1991.
- DAVIS, P. J. y HERSH, R.: *El sueño de Descartes*. Barcelona, MEC/Labor, 1989.
- PINILLOS V. y ZUAZUA, E. (Eds.): *Temas relevantes de la matemática actual: el reto de la enseñanza secundaria*. Madrid, Centro de Publicaciones del MEC/UEP, 2000.
- RODRÍGUEZ DEL RÍO, R.: *Las Matemáticas en la transición del Bachillerato a la Universidad*. Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada, nº 18, 2001, pp. 109-114.
- RODRÍGUEZ DEL RÍO, R. y ZUAZUA, E., (Eds.): *De la Aritmética al Análisis: los nuevos currícula de Matemáticas en la Enseñanza Secundaria*. Curso de Verano para Profesores de Enseñanza Secundaria, MEC/UEP, en vías de publicación.
- STEWART, I.: *Conceptos de la matemática moderna*. Madrid, Alianza Editorial, 1988.